## 基础课04 基本不等式

### 课时评价·提能

#### 基础巩固练

1. 若实数，满足，则的最大值为（ D ）.

A. 2 B. 1 C. D.

[解析]，，

，即，当且仅当 时，等号成立，

.故选.

2. 函数的最小值为（ D ）.

A. 4 B. C. D.

[解析]因为，所以，当且仅当，即 时，等号成立,所以函数 的最小值为.故选.

3. 已知正实数，满足，则的最小值为（ C ）.

A. 2 B. 4 C. 8 D. 12

[解析]由，且，可得，

所以，

当且仅当，即，时,等号成立.故选.

4. 若，则有（ A ）.

A. 最大值 B. 最小值 C. 最大值1 D. 最小值1

[解析]由，得，

所以，当且仅当，即 时，等号成立，所以当 时，有最大值.故选.

5. 下列不等式恒成立的是（ D ）.

A. B.

C. D.

[解析]对于，当 时，不等式显然不成立，故 错误；

对于，“”成立的条件为“,”，故 错误；

对于，当 时，不等式显然不成立，故 错误；

对于，由，得，故 正确.

故选.

6. 若用的材料制造某种长方体形状的无盖车厢，规定车厢宽度为，则车厢容积的最大值为（ B ）.

A. B. C. D.

[解析]设长方体车厢的长为，高为，则，即，

，即，

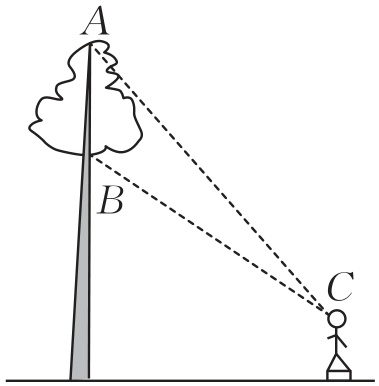
解得，

,

车厢的容积,当且仅当,即,时,等号成立，

车厢容积的最大值为.故选.

7. 最大视角问题是德国数学家米勒提出的几何极值问题，故最大视角问题一般被称为“米勒问题”.如图，树顶离地面12米，树上另一点离地面8米，若某人站在高台上仰视此树，其双眼在离地面2米的处，则的最大值为（ C ）.



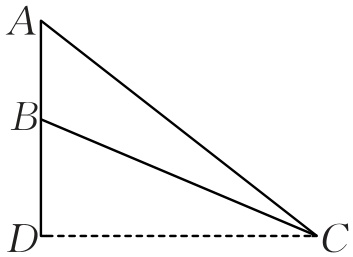
A. B. C. D.

[解析]如图，过点 作，交 于点，则,,.

设 ,，在 中，.

在 中，.

所以，当且仅当，即 时，等号成立，故 的最大值为.故选.



8. 已知正实数，满足，则的最小值为（ A ）.

A. B. C. 1 D.

[解析]因为,，，

所以，则，

由，得，令，则，，

所以，

当且仅当，即，时，等号成立，

则 的最小值为.故选.

#### 综合提升练

9. （多选题）已知，是两个正数，4是与的等比中项，则下列说法正确的是（ BC ）.

A. 的最小值为1 B. 的最大值为1

C. 的最小值为 D. 的最大值为

[解析]因为，所以，

所以，可得，当且仅当,即,时，等号成立，

所以 的最大值为1，故 错误，正确.

因为，当且仅当,即,时，等号成立，所以 的最小值为，无最大值，故 正确，错误.故选.

10. （多选题）以下说法正确的是（ AB ）.

A. 若，则的最大值为

B. 当时，

C. 关于的不等式在上有解等价于在上成立

D. 当,时，的最小值为

[解析]对于，因为，所以 当且仅当，即 时，等号成立，所以，所以 的最大值为，故 正确；

对于，因为，所以，所以，当且仅当 时，等号成立，故 正确；

对于,关于 的不等式 在 上有解等价于 在 上成立，故 错误；

对于，当,时，，令，，由对勾函数的性质易知 在 上单调递减，所以 在,上无最值，故 错误.故选.

11. 设,,,，若,，则的最大值为  .

[解析]因为，所以,，

又,，

所以,.

因为,，根据基本不等式有，

当且仅当，即,时，等号成立，

所以，

所以，

所以 的最大值为.

12. （双空题）已知实数，，不全为0，则的最小值为  ，最大值为1.

[解析]，当且仅当，时,等号成立，所以 的最小值为.

，当且仅当 时，等号成立，所以 的最大值为1.

#### 应用情境练

13. 某社区决定建立一个取暖供热站.已知供热站每月自然消费（单位：万元）与供热站到社区的距离（单位：千米）成反比，每月供热费（单位：万元）与供热站到社区的距离成正比.如果在距离社区20千米处建立供热站，自然消费与供热费分别为0.5万元和8万元，那么要使这两项费用之和最小，供热站应建在离社区5千米处.

[解析]设供热站建在离社区 千米处，自然消费 万元，供热费 万元，

由题意得,当 时，，，

所以,，

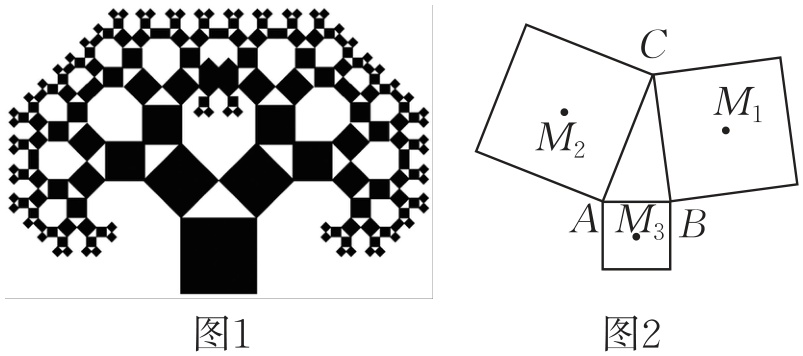
所以，,

所以两项费用之和为，

当且仅当，即 时，等号成立，

所以要使这两项费用之和最小，供热站应建在离社区5千米处.

14. 毕达哥拉斯树，也叫“勾股树”，是由毕达哥拉斯根据勾股定理画出来的一个可以无限重复的树形图形（如图1）.现由毕达哥拉斯树部分图形作出图2，为锐角三角形，面积为1,，以的三边为边长的正方形的中心分别为,,，则的最小值为  .



[解析]由题意知，,，

设 的内角,,所对的边分别为,,,

因为，即，所以，

由余弦定理得.

在 中，,,，

由余弦定理可得.

又，所以，则.

同理，,.

故，当且仅当 时，等号成立，所以,故 的最小值为.

#### 创新拓展练

15. 已知，，曲线在处的切线为，若点在直线上，则的最小值为1.

[解析]由，得，

，

又， 直线，即.

点 在直线 上，.

又，，，当且仅当，即，时,等号成立，

的最小值为1.

16. 已知函数.

（1）若，且，求的最小值.

（2）求证：函数在上单调的充要条件是.

[解析]（1）若，则，即，

，，,，

，当且仅当,时取等号，

的最小值为1.

（2）充分性：当 时，，

解得 或，即 或，

的图象是开口向上，对称轴为直线 的抛物线，

函数 在 上单调.

必要性：的图象是开口向上，对称轴为直线 的抛物线，且函数 在 上单调，

或，即 或，

，即，

即.

函数 在 上单调的充要条件是.